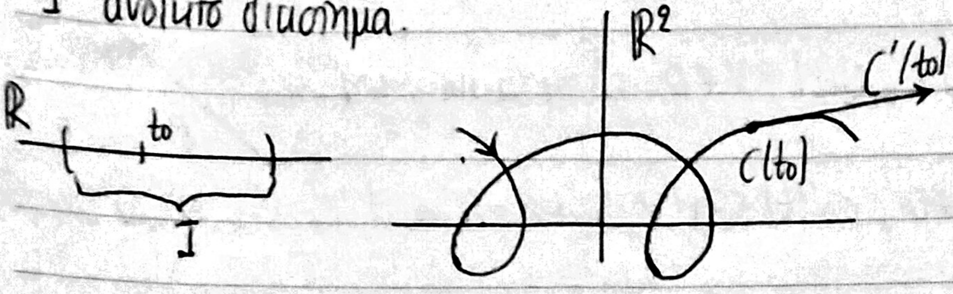
Μάθημα 3ο 10/10/16

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ και C^k απεικόνιση $(k \geq 2)$, $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
I ανοικτό διάστημα.



Η c καλείται **κανονική** αν $c'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Η **εφαπτόμενη ευθεία** στο t_0 είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το $c'(t_0)$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Είναι η κανονικότητα γεωμ. ιδιότητα;
Αν $c, \tilde{c}$ γεωμ. ισότιμες και c κανονική, είναι η $\tilde{c}$ κανονική;

$\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$, $T = T_v \circ A$ $\quad A \in O(2)$
(T_v: παράλληλη μεταφορά)

$c(t) = (x(t), y(t))$
$\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$

$v = (v_1, v_2)$. Έστω $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ πίνακας του A ως προς $\{e_1, e_2\}$

$$\tilde{c}(t) = T \circ c(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

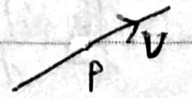
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{c}'(t) = A(c'(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|A c'(t)\| = \|c'(t)\| > 0 \Rightarrow \tilde{c} \text{ είναι κανονική}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- $c(t) = p + tv$, $p \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

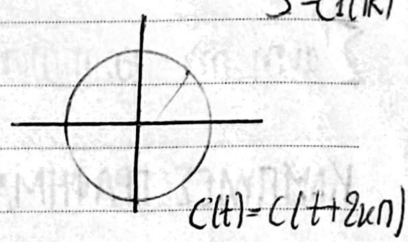
$c_2(\mathbb{R}) = c_1(\mathbb{R})$



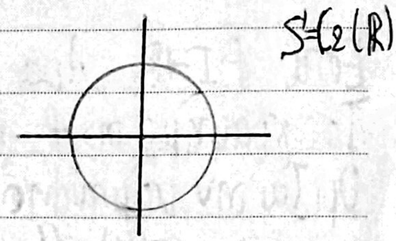
Το διάνυσμα ταχύτητας είναι $c_1'(t) = v$

$c_2(t) = p + t^3 v$, $c_2'(t) = 3t^2 v$, $c_2'(0) = 0 \Rightarrow$ Η c_2 δεν είναι κανονική

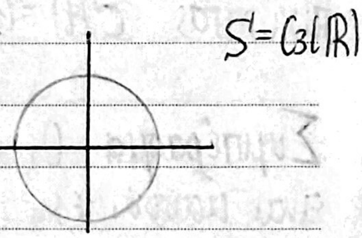
- $\left.\begin{array}{l} c_1(t) = (\cos t, \sin t) \\ c_1'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0) \\ \|c_1'(t)\| = 1 \end{array}\right\}$ κανονική



$\left.\begin{array}{l} c_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \\ c_2'(t) = 2(-\sin 2t, \cos 2t) \\ \|c_2'(t)\| = 2 \end{array}\right\}$ κανονική



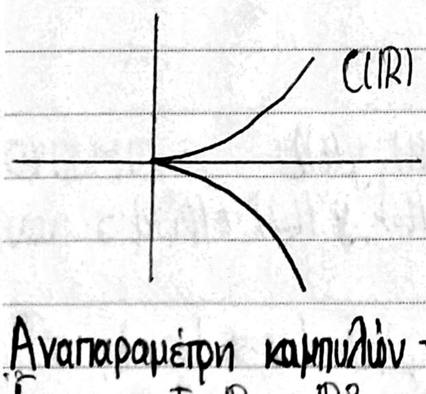
$\left.\begin{array}{l} c_3(t) = (\cos t^2, \sin t^2) \\ c_3'(t) = 2t(-\sin t^2, \cos t^2) \\ \|c_3'(t)\| = 2|t| \end{array}\right\}$ δεν είναι κανονική

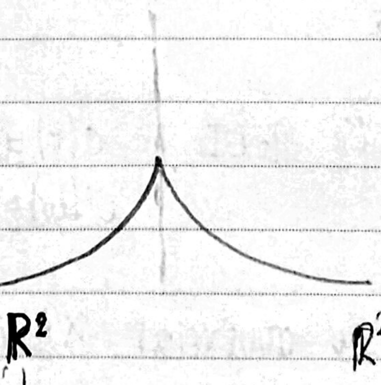


- Η παραβολή του Neil.

Είναι η καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2, t^3)$ με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (2t, 3t^2)$

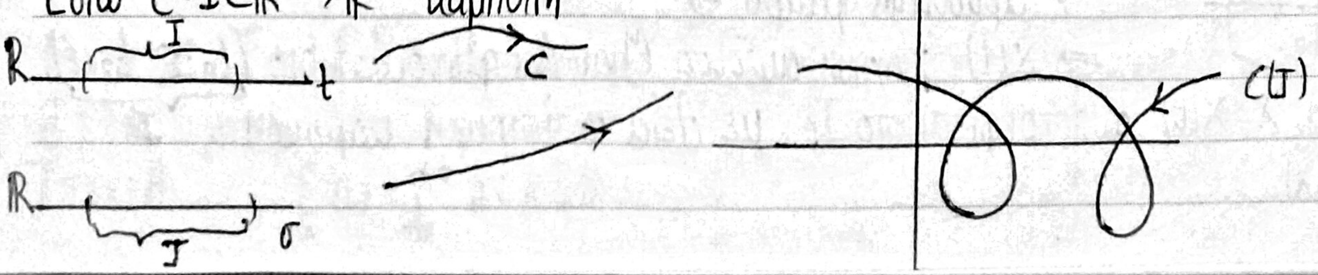
$c'(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ Η c ΔΕΝ είναι κανονική





Αναπαραμέτρηση καμπυλών του $\mathbb{R}^2$

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη



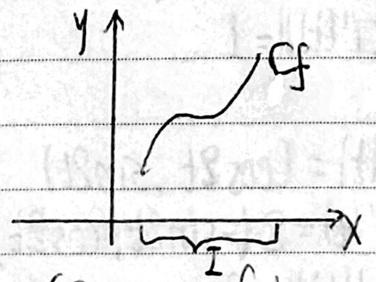
Θεωρώ $f: J \to I$, $f(\sigma) = t$.
Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$

Η $\tilde{c}$ είναι λεία καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας: $\dfrac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \dfrac{dt}{d\sigma} \cdot \dfrac{dc}{dt} = \dfrac{dt}{d\sigma} \cdot \dfrac{dc}{dt}$

Εστω ότι η c είναι κανονική.
Συμπέρασμα: Η $\tilde{c} = c \circ f$ είναι κανονική <u>ανν</u> $\dfrac{df}{d\sigma} > 0$ ΠΑΝΤΟΥ ή $\dfrac{df}{d\sigma} < 0$ ΠΑΝΤΟΥ

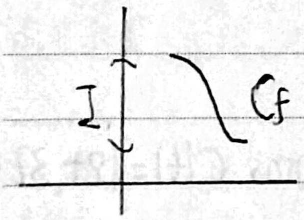
Σ' αυτή την περίπτωση η $\tilde{c}$ λέγεται αναπαραμέτρηση της c.

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ



Εστω $f: I \to \mathbb{R}$ λεία
Το γράφημα της f είναι το $C_f = \{(x, f(x)) / x \in I\}$
Ορίζω την καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^n$ με $c(t) = (t, f(t))$, $c(I) = C_f$ και διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (1, f'(t))$

Συμπέρασμα: Οι καμπύλες γραφήματος (είτε ως προς Ox είτε ως προς την Oy) είναι κανονικές

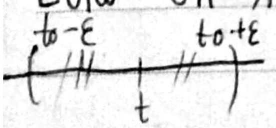


$c(t) = (f(t), t)$

Μια συνέπεια της κανονικότητας

Εστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική $t_0 \in I$, $c(t) = (x(t), y(t))$
$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$

Εστω ότι $x'(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ Λόγω συνέχειας $x'(t) \neq 0$, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$,



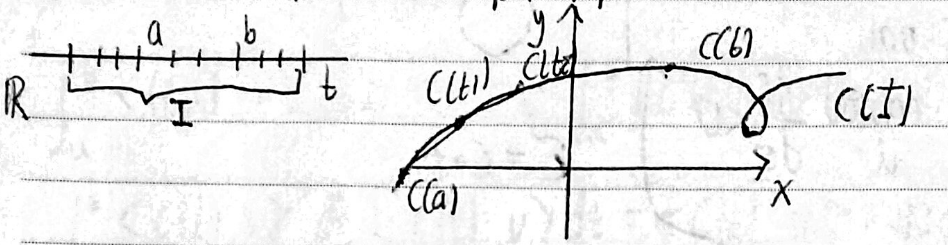
ε αρκούντως μικρό $\Rightarrow$
$\Rightarrow x(t)$ γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο $\underbrace{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}_{I_0}$
$\Rightarrow$ Η $x = x(t)$ αντιστρέφεται στο I_0 με λεία αντίστροφη καμπύλη $t = t(x)$.

Για $t \in I$ έχω $c(t) = (x(t), y(t)) = (x, y(t(x))) = (x, f(x))$

Συμπέρασμα: Κάθε κανονική καμπύλη <u>τοπικά</u> δεν έχει αυτοτομές και είναι τοπικά καμπύλη γράφημα.

Μήκος καμπύλης

Έστω $C: I \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη.



$C|_{[a,b]}$ Θεωρώ διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του $[a,b]$.
Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής με άκρα $c(t_0), c(t_1), \ldots, c(t_k)$ είναι ο αριθμός $L(c, P) = \sum_{i=1}^{k} \| c(t_i) - c(t_{i-1}) \|$

Λεπτότητα της P είναι ο αριθμός $|P| = \max\{ t_i - t_{i-1} / i = 1, \ldots, k\}$

Θεωρώ ακολουθία διαμερίσεων P_n τ.ω $[a,b]$ τέτοια και $\lim |P_n| = 0$.
Αποδεικνύεται ότι αν η C είναι C^1 τότε το $\lim L(C, P_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο της επιλογής της ακολουθίας P_n

$$\lim L(c, P_n) = \int_a^b \| c'(t) \| dt$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο αριθμός $\int_a^b \| c'(t) \| dt$ καλείται μήκος της C από το a έως το b και συμβολίζεται με $L_a^b(c) = \int_a^b \| c'(t) \| dt$

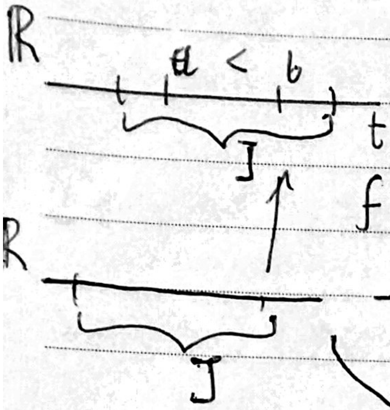
<u>Το μήκος καμπύλης ως γεωμετρική έννοια</u>

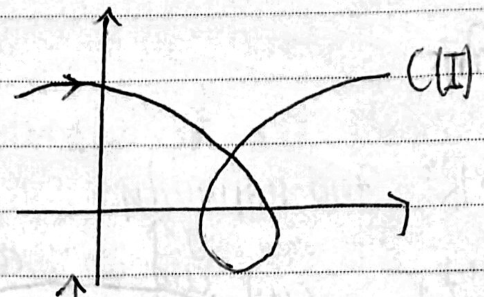
Έστω $C: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη και $\tilde{c}: I \to \mathbb{R}^2$ γεωμ. ισοτιμές με την C, δηλ. $\tilde{c} = T \circ C$ για κάποια $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$
$T = T_v \circ A$, $L_a^b(c) = \int_a^b \| c'(t) \| dt$, $L_a^b(\tilde{c}) = \int_a^b \| \tilde{c}'(t) \| dt$

$$\tilde{c}'(t) = Ac'(t) \rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|Ac'(t)\| \xlongequal{A\in O(2)} \|c'(t)\| \quad \forall t$$

$$\rightarrow \int_a^b \|\tilde{c}'(t)\|dt = \int_a^b \|c'(t)\|\, dt$$

Μήκος αναπαραμέτρησης καμπύλης





$f: J \rightarrow I$ και $\frac{df}{d\sigma} > 0$ παντού ή $\frac{df}{d\sigma} < 0$

$\tilde{c} = c \circ f$

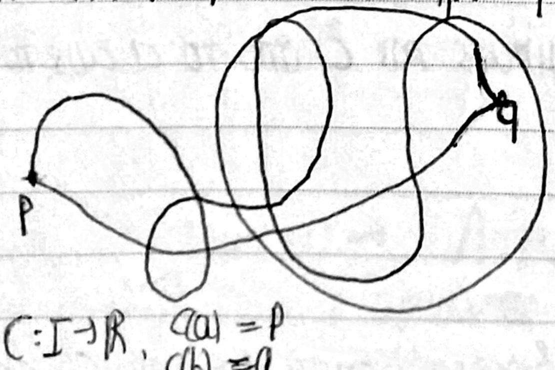
$a = f(\tilde{a})$
$b = f(\tilde{b})$

$\tilde{a} < \tilde{b}$ αν $\frac{df}{d\sigma} > 0$ ενώ $\tilde{a} > \tilde{b}$ αν $\frac{df}{d\sigma} < 0$.

Έστω $\frac{df}{d\sigma} > 0$ τότε $L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} \right\| d\sigma$

$$L(c) = \int_a^b \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \frac{df}{d\sigma}\, d\sigma = \begin{cases} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{df}{d\sigma} \frac{dc}{dt} \right\| d\sigma, & \frac{df}{d\sigma} > 0 \\ \left(-\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left\| \frac{dc}{dt} \cdot \frac{df}{d\sigma} \right\| d\sigma = \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left\| \frac{df}{d\sigma} \frac{dc}{dt} \right\| d\sigma \right), & \frac{df}{d\sigma} < 0 \end{cases}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Δίνονται τα σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$



Υπάρχει καμπύλη με άκρα τα p, q της οποίας το μήκος να είναι $\leq$ μήκος κάθε άλλης καμπύλης με τα ίδια άκρα;;

$c: I \rightarrow \mathbb{R}$, $c(a) = p$, $c(b) = q$

Απάντηση: Ναι υπάρχει και είναι το ευθύγραμμο τμήμα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρώ το $v = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$

$$<c(t), v>' = <c'(t), v> \leq |<c'(t), v>| \leq \|c'(t)\| \|v\| = \|c'(t)\|$$

$$(<c(t), v>' = <c'(t), v> + <c(t), v'> = <c'(t), v>)$$

$$\int_a^b <c(t), v>' dt \leq \ldots \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_a^b(c)$$

$$\int_a^b <c(t), v>' dt = \int_a^b <c'(t), v> dt = <c(b), v> - <c(a), v> =$$

$$= <q-p, v> = <q-p, q-p/\|q-p\|> = \|q-p\| = d(q, p)$$